

09/11/15

$U(A, \mathbb{R}) = F(A, \mathbb{R}) \setminus B(A, \mathbb{R})$  (δύο σύνολα με φραγμένω συν/βέων).

$U$  όχι γραμμικός χώρος διότι περιέχει τη συνάρτηση  $0 \in B(A, \mathbb{R})$

Πρόταση:  $0$  ( $U, \rho_n$ ) είναι κλειστός μετρικός υπόχωρος του  $F(A, \mathbb{R})$ .

Απόδειξη: Έστω  $f_n \in U$ . Θεωρούμε  $f_n \rightarrow f$ . Υποθ. ότι  $f \in B$ . άρα  $\exists M > 0$  ε.ω.  $|f(x)| \leq M, \forall x \in A$ .

άρα  $(\exists n_0 \in \mathbb{N}) : \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < 1, \forall x \in A \Rightarrow$   
 $\Rightarrow |f_n(x)| - |f(x)| < 1, \forall x \in A \Rightarrow |f_n(x)| < 1 + |f(x)| \leq 1 + M, \forall x \in A.$

Απονο  $\Rightarrow f \in U$ .

$U$ : κλειστό }  $\rightarrow$   $U$ : ανοικτό  
 $B$ : κλειστό }  $B$ : ανοικτό  $F = U(A, \mathbb{R}) \cup B(A, \mathbb{R})$

Πρόταση:  $0$  ( $F(A, \mathbb{R}), \rho_n$ ) δεν είναι συνεκτός.

$U = \bar{U}$  } Πρόταση:  $0$  ( $U, \rho_n$ ) είναι πλήρως μετρικός υπό-  
 $F$ : πλήρης } χώρος του  $(F, \rho_n)$ .

$f_n \in U, f \in F$  &  $f \notin U \Rightarrow f_n \not\rightarrow f$ : διαφορετικά.

π.χ.:  $f_n(x) = e^{x-n}, x > 0$   
 $x_0 \in \mathbb{R} : f_n(x_0) = e^{x_0-n} = g_n(x_0)$  (όχι διαφορετικά σύνολα).

$g_n(x) = x - n \rightarrow -\infty$ : κατά εκτείο

$f_n(x) = e^{g_n(x)} \rightarrow 0$ : κατά εκτείο.

Παραγράφοι 8.15 - 8.16.

~~Ερωτημα~~ Έστω  $f \in F(A, \mathbb{R})$   $\hookrightarrow C(A, \mathbb{R})$   $\mu \text{ ή } |x-y| < \delta \Rightarrow$   
 $f$  συνεχής:  $(\forall x \in A) (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta = \delta(\varepsilon, x) > 0) : \forall y \in A \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$   
 (ολοκληρωτική) -  $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0) : \forall x, y \in A \text{ ή } |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .  
 $\uparrow$   
 $C_n(A, \mathbb{R})$

$$C_n(A, \mathbb{R}) \subseteq C(A, \mathbb{R}) \subseteq F(A, \mathbb{R})$$

Έστω  $f_n \rightarrow f$ ,  $f \in F(A, \mathbb{R})$ .

$f_n$  συνεχής:  $(\forall \varepsilon > 0, \varepsilon < 1) \exists k : \rho_n(f_k, f) < \frac{\varepsilon}{3}$ .

$f_n$  συνεχής στο  $x$ :  $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta = \delta(\varepsilon, x) > 0) : |x-y| < \delta \Rightarrow$

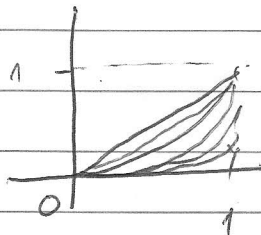
$$\Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\begin{aligned}
 (\forall \varepsilon > 0) : (\exists \delta = \delta(\varepsilon, x) > 0) : |x-y| < \delta &\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \\
 &\leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(y)| + |f_k(y) - f(y)| \leq \\
 &\leq \rho_n(f, f_k) + \frac{\varepsilon}{3} + \rho_n(f_k, f) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Π.Χ.  $f_n \rightarrow f$ ,  $f$  όχι συνεχής

$$f_n(x) = x^n, x \in [0, 1].$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x=1 \\ 0, & x \in [0, 1) \end{cases}$$



—