09/11/15

$\mathcal{U}(A,\mathbb{R}) = F(A,\mathbb{R}) \setminus B(A,\mathbb{R})$ (σύνολο μη φραγμένων συναρτήσεων).
$\mathcal{U}$ όχι γραμμικός χώρος διότι περιέχει τη συνάρτηση $0 \in B(A,\mathbb{R})$

Πρόταση: Ο $(\mathcal{U}, \rho_u)$ είναι κλειστός μετρικός υπόχωρος του $F(A,\mathbb{R})$

Απόδειξη: Έστω $f_\nu \in \mathcal{U}$. Θεωρούμε ~~..~~ $f_\nu \to f$. Υποθ. ότι $f \in B$. άρα $\exists M > 0$ τ.ω. $|f(x)| \leq M, \forall x \in A$.
άρα $(\exists \nu_0 \in \mathbb{N}) : \forall \nu \geq \nu_0 : |f_\nu(x) - f(x)| < 1, \forall x \in A. \Rightarrow$
$\Rightarrow |f_\nu(x)| - |f(x)| < 1, \forall x \in A \Rightarrow |f_\nu(x)| < 1 + |f(x)| \leq 1 + M, \forall x \in A.$
Άτοπο $\Rightarrow f \in \mathcal{U}$.

$\left.\begin{array}{l} \mathcal{U} : \text{κλειστό} \\ B : \text{κλειστό} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \mathcal{U} : \text{ανοικτό} \\ B : \text{ανοικτό} \end{array}$, $F = \mathcal{U}(A,\mathbb{R}) \cup B(A,\mathbb{R})$

Πόρισμα: Ο $(F(A,\mathbb{R}), \rho_u)$ δεν είναι συνεκτικός.

$\left.\begin{array}{l} \mathcal{U} = \overline{\mathcal{U}} \\ F : \text{πλήρης} \end{array}\right\} \Rightarrow$ **Πόρισμα**: Ο $(\mathcal{U}, \rho_u)$ είναι πλήρης μετρικός υπόχωρος του (F, ρ_u).

$f_\nu \in \mathcal{U}, f \in F$ κ' $f \notin \mathcal{U} \Rightarrow f_n \not\to f$: ομοιόμορφα.

π.χ. $f_n(x) = e^{x-n}, x > 0$
$x_0 \in \mathbb{R} : f_\nu(x_0) = e^{x_0 - n} = g_n(x_0)$ (όχι ομοιόμορφη σύγκλιση).
$g_\nu(x) = x - n \to -\infty$: κατά σημείο
$f_\nu(x) = e^{g_\nu(x)} \to 0$: κατά σημείο.

Παράγραφοι 8.15 – 8.16.

Έστω $f \in F(A,\mathbb{R})$ $\quad C(A,\mathbb{R})$

f συνεχής: $(\forall x\in A)(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta=\delta(\varepsilon,x)>0): \forall y\in A$ με $|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

(ομοιόμορφη) - $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0): \forall x,y\in A$ με $|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

$C_u(A,\mathbb{R})$

$$C_u(A,\mathbb{R}) \subseteq C(A,\mathbb{R}) \subseteq F(A,\mathbb{R})$$

Έστω $f_\nu \to f$ $\quad f\in F(A,\mathbb{R})$.

f_ν: συνεχής: $(\forall \varepsilon>0, \varepsilon<1)\ \exists k: \rho_u(f_k,f)<\frac{\varepsilon}{3}$.

f_ν συνεχής στο x: $(\forall\varepsilon>0), \exists\delta=\delta(\varepsilon,x): |x-y|<\delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |f_k(x)-f_k(y)|<\frac{\varepsilon}{3}$

$(\forall\varepsilon>0): (\exists\delta=\delta(\varepsilon,x)>0): |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \le$

$\le |f(x)-f_k(x)| + |f_k(x)-f_k(y)| + |f_k(y)-f(x)| \le$

$\le \rho_u(f,f_k)+\varepsilon/3+\rho_u(f_k,f) \le \varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon$.

~~Π.χ.~~ $f_\nu\to f$, f όχι συνεχής

$f_\nu(x)=x^\nu$, $x\in[0,1]$.

$$f(x)=\begin{cases}1, & x=1\\ 0, & x\in[0,1)\end{cases}$$